Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2024, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución:

Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Sean X, Y, Z las longitudes en cm de los listones largos, intermedios y cortos, respectivamente.

Planteamos el sistema de ecuaciones a partir de las condiciones del enunciado:

1. **Igualdad de longitudes totales:** $2L + 4I = 3I + 15C$. Simplificando: $2X + Y - 15Z = 0$. [source 4]
2. **Relación largo vs intermedio+corto:** $L = (I + C) + 17$. Reordenando: $X - Y - Z = 17$. [source 5]
3. **Relación corto vs intermedio+largo:** $9C + 7 = I + L$. Reordenando: $X + Y - 9Z = 7$. [source 6]

El sistema de ecuaciones lineales es:

$$\begin{cases} 2X + Y - 15Z = 0 \\ X - Y - Z = 17 \\ X + Y - 9Z = 7 \end{cases}$$

Discusión del sistema (Teorema de Rouché-Frobenius): La matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A*) son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -15 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}, \quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de A:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -15 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -9 \end{vmatrix} \\ &= 2((-1)(-9) - (-1)(1)) - 1(1(-9) - (-1)(1)) + (-15)(1(1) - (-1)(1)) \\ &= 2(9 + 1) - 1(-9 + 1) - 15(1 + 1) \\ &= 2(10) - 1(-8) - 15(2) \\ &= 20 + 8 - 30 = -2 \end{aligned}$$

Como $|A| = -2 \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 3 ($\text{Rg}(A) = 3$). El rango de la matriz ampliada también es 3 ($\text{Rg}(A^*) = 3$). El número de incógnitas es 3. Dado que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $= 3$, el sistema es Compatible Determinado (S.C.D.).

$$\boxed{\textbf{El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.)}}$$

Resolución del sistema (Regla de Cramer): Ya sabemos que $|A| = -2$. Calculamos los determinantes para cada variable:

$$|A_X| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -15 \\ 17 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & -9 \end{vmatrix} = 0 - 1(17(-9) - (-1)(7)) + (-15)(17(1) - (-1)(7))$$

$$= -(-153+7) - 15(17+7) = -(-146) - 15(24) = 146 - 360 = -214.$$

$$|A_Y| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -15 \\ 1 & 17 & -1 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix} = 2(17(-9) - (-1)(7)) - 0 + (-15)(1(7) - 17(1))$$

$$= 2(-153+7) - 15(7-17) = 2(-146) - 15(-10) = -292 + 150 = -142.$$

$$|A_Z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2(-1(7) - 17(1)) - 1(1(7) - 17(1)) + 0$$

$$= 2(-7-17) - 1(7-17) = 2(-24) - 1(-10) = -48 + 10 = -38.$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$X = \frac{|A_L|}{|A|} = \frac{-214}{-2} = 107.$$

$$Y = \frac{|A_I|}{|A|} = \frac{-142}{-2} = 71.$$

$$Z = \frac{|A_C|}{|A|} = \frac{-38}{-2} = 19.$$

$$\boxed{\textbf{Longitud: Largo (X) = 107 cm, Intermedio (Y) = 71 cm, Corto (Z) = 19 cm.}}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) **Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.**
b) **Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.**
c) **Si $g(x) = f(-x)$ calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.**

Solución:

a) **Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.**

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
Calculamos $f(\pi)$:

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi(\pi^3) + \pi^2(\pi^2) + \pi^3(\pi) + \pi^4 = \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 = 5\pi^4.$$

El punto de tangencia es $(\pi, 5\pi^4)$.
Calculamos la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3.$$

Evaluamos la derivada en $x = \pi$:

$$f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi(\pi^2) + 2\pi^2(\pi) + \pi^3 = 4\pi^3 + 3\pi^3 + 2\pi^3 + \pi^3 = 10\pi^3.$$

La pendiente es $m = 10\pi^3$.
La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x - \pi)$$

$$y = 10\pi^3 x - 10\pi^4 + 5\pi^4$$

$$y = 10\pi^3 x - 5\pi^4.$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 10\pi^3 x - 5\pi^4}}$$

b) **Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.**

Usando el Teorema de Rolle:
El Teorema de Rolle establece que si una función f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
La función $f(x)$ es un polinomio, por lo que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y en particular en $[-\pi, 0]$ y $(-\pi, 0)$.
Calculamos $f(-\pi)$ y $f(0)$:

$$f(0) = 0^4 + \pi(0)^3 + \pi^2(0)^2 + \pi^3(0) + \pi^4 = \pi^4.$$

$$f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi(-\pi)^3 + \pi^2(-\pi)^2 + \pi^3(-\pi) + \pi^4 = \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 = \pi^4.$$

Como $f(-\pi) = f(0) = \pi^4$, se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle.
Por lo tanto, existe al menos un $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

Usando el Teorema de Bolzano:

El Teorema de Bolzano establece que si una función h es continua en $[a,b]$ y $h(a)$ y $h(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$.
Queremos probar que existe $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$. Aplicaremos Bolzano a la función derivada $h(x) = f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$.
$f'(x)$ es un polinomio, por lo que es continua en todo $\mathbb{R}$, y en particular en $[-\pi, 0]$.
Evaluamos $f'(x)$ en los extremos del intervalo:

$$f'(0) = 4(0)^3 + 3\pi(0)^2 + 2\pi^2(0) + \pi^3 = \pi^3.$$

$$f'(-\pi) = 4(-\pi)^3 + 3\pi(-\pi)^2 + 2\pi^2(-\pi) + \pi^3 = -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = (-4+3-2+1)\pi^3 = -2\pi^3.$$

Como $\pi > 0$, tenemos $f'(0) = \pi^3 > 0$ y $f'(-\pi) = -2\pi^3 < 0$.
Dado que $f'(x)$ es continua en $[-\pi, 0]$ y $f'(-\pi)$ y $f'(0)$ tienen signos opuestos, el Teorema de Bolzano garantiza que existe al menos un $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$\boxed{\textbf{Ambos teoremas prueban la existencia de } c \in (-\pi, 0) \textbf{ tal que } f'(c) = 0.}$$

c) Si $g(x) = f(-x)$ calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.
Calculamos $g(x) = f(-x)$:

$$g(x) = (-x)^4 + \pi(-x)^3 + \pi^2(-x)^2 + \pi^3(-x) + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4.$$

El área A entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en $[0,\pi]$ es $A = \int_0^\pi |f(x) - g(x)|dx$. Calculamos la diferencia $f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4) - (x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4) \\ &= x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 - x^4 + \pi x^3 - \pi^2 x^2 + \pi^3 x - \pi^4 \\ &= 2\pi x^3 + 2\pi^3 x. \end{aligned}$$

En el intervalo $[0, \pi]$, $x \geq 0$. Como $\pi > 0$, $2\pi x^3 \geq 0$ y $2\pi^3 x \geq 0$. Por lo tanto, $f(x) - g(x) = 2\pi x^3 + 2\pi^3 x \geq 0$ en $[0, \pi]$. El área es:

$$A = \int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)dx.$$

Calculamos la integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \left[2\pi \frac{x^4}{4} + 2\pi^3 \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \left[\frac{\pi}{2}x^4 + \pi^3 x^2\right]_0^\pi \\ &= \left(\frac{\pi}{2}(\pi)^4 + \pi^3(\pi)^2\right) - \left(\frac{\pi}{2}(0)^4 + \pi^3(0)^2\right) \\ &= \left(\frac{\pi^5}{2} + \pi^5\right) - 0 = \frac{\pi^5 + 2\pi^5}{2} = \frac{3\pi^5}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{3\pi^5}{2}\ \text{u}^2}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

a) **Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z=0$.**

b) **Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.**

Solución:

a) **Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z=0$.**

Sea π_1 el plano buscado. Pasa por $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$.
Un vector contenido en π_1 es $\vec{AB} = B - A = (1-0, 1-0, 0-1) = (1,1,-1)$.
El plano $z=0$ tiene como vector normal $\vec{n}_{z=0} = (0,0,1)$.
Como π_1 es perpendicular al plano $z=0$, el vector normal $\vec{n}_{z=0}$ debe ser paralelo a π_1, es decir, es un vector director de π_1.
El plano π_1 está determinado por el punto $A(0,0,1)$ y los vectores directores $\vec{AB} = (1,1,-1)$ y $\vec{n}_{z=0} = (0,0,1)$.
La ecuación general del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(1\cdot 1 - (-1)\cdot 0) - y(1\cdot 1 - (-1)\cdot 0) + (z-1)(1\cdot 0 - 1\cdot 0) = 0$$

$$x(1) - y(1) + (z-1)(0) = 0$$

$$x - y = 0.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi_1 \equiv x - y = 0}}$$

b) **Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.**

Sea π_2 el plano $x+z=1$. Su vector normal es $\vec{n}_{\pi_2} = (1,0,1)$. Comprobamos si $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$ están en π_2:
Para A: $0+1=1$. Sí.
Para B: $1+0=1$. Sí.
Las rectas r_1 y r_2 deben estar contenidas en π_2. Por lo tanto, su vector director común, $\vec{d} = (d_1,d_2,d_3)$, debe ser perpendicular a $\vec{n}_{\pi_2}$.

$$\vec{d}\cdot\vec{n}_{\pi_2} = 0 \implies (d_1,d_2,d_3)\cdot(1,0,1) = 0 \implies d_1 + d_3 = 0 \implies d_3 = -d_1.$$

El vector director es de la forma $\vec{d} = (d_1, d_2, -d_1)$.
Recta r_1: Pasa por $A(0,0,1)$, vector $\vec{d}$.
Recta r_2: Pasa por $B(1,1,0)$, vector $\vec{d}$.
La distancia entre dos rectas paralelas $r_1(A,\vec{d})$ y $r_2(B,\vec{d})$ es

$$d(r_1,r_2) = \frac{|\vec{AB}\times\vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

Sabemos $\vec{AB} = (1,1,-1)$. Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{AB} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ d_1 & d_2 & -d_1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-d_1 - (-d_2)) - \vec{j}(-d_1 - (-d_1)) + \vec{k}(d_2 - d_1)$$

$$= \vec{i}(-d_1 + d_2) - \vec{j}(0) + \vec{k}(d_2 - d_1) = (-d_1 + d_2, 0, d_2 - d_1).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{AB} \times \vec{d}| = \sqrt{(-d_1 + d_2)^2 + 0^2 + (d_2 - d_1)^2} = \sqrt{2(d_2 - d_1)^2} = \sqrt{2}|d_2 - d_1|.$$

Calculamos el módulo de $\vec{d}$:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + (-d_1)^2} = \sqrt{2d_1^2 + d_2^2}.$$

La distancia debe ser 1:

$$\frac{\sqrt{2}|d_2 - d_1|}{\sqrt{2d_1^2 + d_2^2}} = 1 \implies \sqrt{2}|d_2 - d_1| = \sqrt{2d_1^2 + d_2^2}.$$

Elevamos al cuadrado:

$$\begin{gathered} 2(d_2 - d_1)^2 = 2d_1^2 + d_2^2 \\ 2(d_2^2 - 2d_1d_2 + d_1^2) = 2d_1^2 + d_2^2 \\ 2d_2^2 - 4d_1d_2 + 2d_1^2 = 2d_1^2 + d_2^2 \\ d_2^2 - 4d_1d_2 = 0 \implies d_2(d_2 - 4d_1) = 0. \end{gathered}$$

Esto da dos posibilidades para la relación entre d_1 y d_2:
1. $d_2 = 0$: El vector sería $\vec{d} = (d_1, 0, -d_1)$. Si $d_1 = 1$, $\vec{d} = (1, 0, -1)$. Este es $\vec{n}_{\pi_2}$, normal al plano. Las rectas no pueden tener un vector director normal al plano en el que están contenidas. Este caso no es válido.
2. $d_2 - 4d_1 = 0 \implies d_2 = 4d_1$. Elegimos $d_1 = 1$, entonces $d_2 = 4$. El vector director es $\vec{d} = (1, 4, -1)$. Este vector es perpendicular a $\vec{n}_{\pi_2}$: $(1, 4, -1) \cdot (1, 0, 1) = 1 + 0 - 1 = 0$. Es válido.
Las ecuaciones de las rectas son: Recta r_1: Pasa por $A(0, 0, 1)$, director $\vec{d} = (1, 4, -1)$.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Recta r_2: Pasa por $B(1, 1, 0)$, director $\vec{d} = (1, 4, -1)$.

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 4\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

(Se pueden expresar en forma continua también).

$$\boxed{\boldsymbol{r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 4\mu \\ z = -\mu \end{cases}}}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

Sabiendo que $\boldsymbol{P(\overline{A}) = \frac{11}{20}, P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}}$ **y** $\boldsymbol{P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}}$, **se pide:**

a) **Calcular** $\boldsymbol{P(A \cap B)}$ **y** $\boldsymbol{P(B)}$.

b) **Calcular** $\boldsymbol{P(C)}$, **siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que** $\boldsymbol{P(A \cup C) = \frac{14}{25}}$.

Solución:

a) **Calcular** $\boldsymbol{P(A \cap B)}$ **y** $\boldsymbol{P(B)}$.

Datos: $P(\overline{A}) = 11/20 \implies P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 11/20 = 9/20$.
$P(A|B) - P(B|A) = 1/24$.
$P(A \cap \overline{B}) = 3/10$.
Usamos la fórmula de la probabilidad del suceso A menos la intersección:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{20} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \frac{9}{20} - \frac{6}{20} = \frac{3}{20}.$$

Ahora usamos la segunda ecuación dada y las definiciones de probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

y

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{24}$$

Sustituimos los valores de $P(A \cap B)$ y $P(A)$:

$$\frac{3/20}{P(B)} - \frac{3/20}{9/20} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{3}{20P(B)} - \frac{3}{9} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{3}{20P(B)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

Despejamos el término con $P(B)$:

$$\frac{3}{20P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Ahora despejamos $P(B)$:

$$P(B) = \frac{3}{20} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{20} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{3}{20} \text{ y } P(B) = \frac{2}{5}}}$$

b) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$. Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

Como A y C son independientes, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$. Sustituimos en la fórmula de la unión:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C)$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C)(1 - P(A))$$

Sustituimos los valores conocidos $P(A \cup C) = 14/25$ y $P(A) = 9/20$:

$$\frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C)\left(1 - \frac{9}{20}\right)$$

$$\frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C)\left(\frac{11}{20}\right)$$

Despejamos $P(C)$:

$$P(C)\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{14}{25} - \frac{9}{20}$$

Calculamos la resta de fracciones (mcm $= 100$):

$$\frac{14 \times 4}{100} - \frac{9 \times 5}{100} = \frac{56 - 45}{100} = \frac{11}{100}$$

Entonces:

$$P(C)\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{11}{100}$$

$$P(C) = \frac{11}{100} \div \frac{11}{20} = \frac{11}{100} \times \frac{20}{11} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(C) = \frac{1}{5}}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Consideremos las matrices reales

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ con } \boldsymbol{b \neq 0}.$$

Se pide:

a) **Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $\boldsymbol{BCB^{-1} = A}$.**
b) **Calcular el determinante de la matriz $\boldsymbol{AA^t}$.**
c) **Resolver el sistema $\boldsymbol{B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ para $\boldsymbol{b = 1}$.**

Solución:

a) **Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $\boldsymbol{BCB^{-1} = A}$.**

La ecuación $BCB^{-1} = A$ es válida si y solo si B^{-1} existe, y si $BC = AB$.
Existencia de B^{-1}:
Calculamos el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{vmatrix} = b \cdot b \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ b & b & b \end{vmatrix} = b^2 \cdot b \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = b^3 \left(1(3-1) - 2(2-1) + 1(2-3)\right) = b^3(2 - 2(1) + (-1)) = b^3(2-2-1) = -b^3.$$

Para que B^{-1} exista, necesitamos $|B| \neq 0$, lo cual implica $-b^3 \neq 0$, es decir, $b \neq 0$. El enunciado ya indica $b \neq 0$. Por tanto, B^{-1} existe.
Comprobación de $BC = AB$:

$$BC = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 4b & 3b \\ 4b & 6b & 3b \\ 2b & 2b & 3b \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3b-2b+b & 6b-3b+b & 3b-b+b \\ b+2b+b & 2b+3b+b & b+b+b \\ b-2b+3b & 2b-3b+3b & b-b+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 4b & 3b \\ 4b & 6b & 3b \\ 2b & 2b & 3b \end{pmatrix}.$$

Como $BC = AB$ y B^{-1} existe para $b \neq 0$, la relación $BCB^{-1} = A$ se verifica para todos los valores de b tales que $b \neq 0$.

$$\boxed{\textbf{La relación se verifica para todo } \boldsymbol{b \in \mathbb{R}, b \neq 0}.}$$

b) **Calcular el determinante de la matriz $\boldsymbol{AA^t}$.**

Usamos la propiedad $|XY| = |X||Y|$ y $|X^t| = |X|$.

$$|AA^t| = |A||A^t| = |A||A| = |A|^2.$$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3(1(3) - 1(-1)) - (-1)(1(3) - 1(1)) + 1(1(-1) - 1(1))$$

$$= 3(3+1) - (-1)(3-1) + 1(-1-1) = 3(4) + 1(2) + 1(-2) = 12 + 2 - 2 = 12.$$

Por lo tanto:

$$|AA^t| = |A|^2 = 12^2 = 144.$$

$$\boxed{\boldsymbol{|AA^t| = 144}}$$

c) Resolver el sistema $\boldsymbol{B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ para $\boldsymbol{b = 1}$. Para $b = 1$, la matriz B es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

El determinante de B para $b = 1$ es $|B| = -b^3 = -1^3 = -1$. Como $|B| \neq 0$, el sistema es Compatible Determinado. Usamos la Regla de Cramer.

$$|B_x| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(3-1) - 2(-1-1) + 1(-1-3) = 3(2) - 2(-2) + 1(-4) = 6 + 4 - 4 = 6.$$

$$|B_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-1) - 3(2-1) + 1(2-(-1)) = 1(-2) - 3(1) + 1(3) = -2 - 3 + 3 = -2.$$

$$|B_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-(-1)) - 2(2-(-1)) + 3(2-3) = 1(4) - 2(3) + 3(-1) = 4 - 6 - 3 = -5.$$

La solución es:

$$x = \frac{|B_x|}{|B|} = \frac{6}{-1} = -6.$$

$$y = \frac{|B_y|}{|B|} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

$$z = \frac{|B_z|}{|B|} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = -6, y = 2, z = 5}}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Calcule:

a) $\int_1^e (x+2)\ln x\, dx$.
b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan \frac{x}{2})^{(\frac{1}{\cos x})}$.

Solución:

a) $\int_1^e (x+2)\ln x\, dx$**.** Calculamos la integral definida usando integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Sea $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}dx$. Sea $dv = (x+2)dx \implies v = \int(x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x$.

$$\begin{aligned}\int (x+2)\ln x dx &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\frac{1}{x}dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x}{2} + 2\right)dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + 2x\right) + C.\end{aligned}$$

Ahora aplicamos la Regla de Barrow entre 1 y e:

$$\begin{aligned}\int_1^e (x+2)\ln x dx &= \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 2x\right]_1^e \\ &= \left(\left(\frac{e^2}{2} + 2e\right)\ln e - \frac{e^2}{4} - 2e\right) - \left(\left(\frac{1^2}{2} + 2(1)\right)\ln 1 - \frac{1^2}{4} - 2(1)\right) \\ &= \left(\left(\frac{e^2}{2} + 2e\right)\cdot 1 - \frac{e^2}{4} - 2e\right) - \left(\left(\frac{1}{2} + 2\right)\cdot 0 - \frac{1}{4} - 2\right) \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{e^2}{4} - 2e\right) - \left(0 - \frac{1+8}{4}\right) \\ &= \left(\frac{2e^2 - e^2}{4}\right) - \left(-\frac{9}{4}\right) \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{9}{4} = \frac{e^2+9}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^e (x+2)\ln x\, dx = \frac{e^2+9}{4}}$$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan \frac{x}{2})^{(\frac{1}{\cos x})}$.

Evaluamos la base y el exponente cuando $x \to \pi/2$:
Base: $\tan(x/2) \to \tan(\pi/4) = 1$.
Exponente: $1/\cos x$. Como $\cos(\pi/2) = 0$, el exponente tiende a ∞ (o $-\infty$ dependiendo del lado, pero el signo no afecta la indeterminación 1^∞).
Tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usamos la técnica $L = e^K$, donde $K = \lim_{x\to a} g(x)(f(x) - 1)$.
Aquí $f(x) = \tan(x/2)$ y $g(x) = 1/\cos x$.

$$K = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\left(\tan\frac{x}{2} - 1\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x/2) - 1}{\cos x}.$$

Esto es una indeterminación del tipo $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$. Aplicamos la Regla de L'Hôpital.

Derivada del numerador: $\frac{d}{dx}(\tan(x/2)-1) = \sec^2(x/2)\cdot\frac{1}{2}$.
Derivada del denominador: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

$$K = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sec^2(x/2)}{-\sin x}.$$

Evaluamos el límite sustituyendo $x = \pi/2$:

$$K = \frac{\frac{1}{2}\sec^2(\pi/4)}{-\sin(\pi/2)} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2}{-1} = \frac{\frac{1}{2}(2)}{-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

El límite original es $L = e^K = e^{-1} = 1/e$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan\frac{x}{2})^{(\frac{1}{\cos x})} = \frac{1}{e}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) **A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.**

b) **Dado el punto $Q(3,3,3)$ se quiere imprimir ahora el paralelepipedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepipedo que habría que suministrar al ordenador?**

Solución:

a) **A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.**

Cálculo del volumen:
El volumen de un tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3, P_4 es $V = \frac{1}{6}|\det(\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}, \vec{P_1P_4})|$.
Calculamos los vectores con origen en $P_1(1,1,1)$:
$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (2-1, 1-1, 0-1) = (1,0,-1)$.
$\vec{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (1-1, 3-1, 2-1) = (0,2,1)$.
$\vec{P_1P_4} = P_4 - P_1 = (3-1, a-1, 3-1) = (2, a-1, 2)$.

Calculamos el producto mixto (determinante):

$$\det(\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}, \vec{P_1P_4}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2(2) - 1(a-1)) - 0 + (-1)(0(a-1) - 2(2))$$

$$= 1(4-(a-1)) - 1(0-4) = (4-a+1) - (-4) = 5 - a + 4 = 9 - a.$$

El volumen es $V = \frac{1}{6}|9-a|$.
Nos dice que $V = 1$.

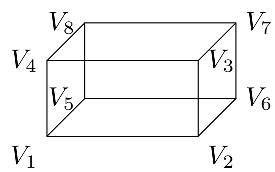
$$\frac{1}{6}|9-a| = 1 \implies |9-a| = 6.$$

Esto implica dos posibilidades: 1. $9 - a = 6 \implies a = 9 - 6 = 3$. 2. $9 - a = -6 \implies a = 9 + 6 = 15$.
Comprobación de la longitud de las aristas (< 10):
Necesitamos calcular la longitud de las 6 aristas para $a = 3$ y $a = 15$.
Aristas desde P_1: $|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} < 10$.
$|\vec{P_1P_3}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 10$.
Si $a = 3$, $\vec{P_1P_4} = (2,2,2)$, $|\vec{P_1P_4}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} < 10$.
Si $a = 15$, $\vec{P_1P_4} = (2,14,2)$, $|\vec{P_1P_4}| = \sqrt{2^2 + 14^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 196 + 4} = \sqrt{204}$. Como $14^2 = 196$ y $15^2 = 225$, $\sqrt{204}$ está entre 14 y 15, por lo que es mayor que 10. El valor $a = 15$ no es válido.
Comprobamos las otras aristas para $a = 3$:
$\vec{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (1-2, 3-1, 2-0) = (-1,2,2)$, $|\vec{P_2P_3}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 < 10$.
Para $a = 3$, $P_4 = (3,3,3)$.
$\vec{P_2P_4} = P_4 - P_2 = (3-2, 3-1, 3-0) = (1,2,3)$, $|\vec{P_2P_4}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} < 10$.
$\vec{P_3P_4} = P_4 - P_3 = (3-1, 3-3, 3-2) = (2,0,1)$, $|\vec{P_3P_4}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} < 10$.
Todas las aristas son menores que 10 para $a = 3$.

El único valor posible es $a = 3$.

$$\boxed{\textbf{El único valor posible es } \boldsymbol{a = 3}.}$$

b) Dado el punto $\boldsymbol{Q(3,3,3)}$ se quiere imprimir ahora el paralelepipedo que tiene a los segmentos $\boldsymbol{P_1P_2}$, $\boldsymbol{P_1P_3}$ y $\boldsymbol{P_1Q}$ como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepipedo que habría que suministrar al ordenador? El paralelepípedo está determinado por el vértice inicial $P_1(1,1,1)$ y los vectores de las aristas concurrentes en P_1: $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$. $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$. $\vec{w} = \overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (3-1, 3-1, 3-1) = (2,2,2)$.



Los 8 vértices del paralelepípedo son:
- $V_1 = P_1 = (1,1,1)$.
- $V_2 = P_1 + \vec{u} = (1,1,1) + (1,0,-1) = (2,1,0)$. (Este es P_2)
- $V_3 = P_1 + \vec{v} = (1,1,1) + (0,2,1) = (1,3,2)$. (Este es P_3)
- $V_4 = P_1 + \vec{w} = (1,1,1) + (2,2,2) = (3,3,3)$. (Este es Q)
- $V_5 = P_1 + \vec{u} + \vec{v} = (2,1,0) + (0,2,1) = (2,3,1)$.
- $V_6 = P_1 + \vec{u} + \vec{w} = (2,1,0) + (2,2,2) = (4,3,2)$.
- $V_7 = P_1 + \vec{v} + \vec{w} = (1,3,2) + (2,2,2) = (3,5,4)$.
- $V_8 = P_1 + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (2,3,1) + (2,2,2) = (4,5,3)$.

$$\boxed{\textbf{Los vértices son: } \boldsymbol{(1,1,1), (2,1,0), (1,3,2), (3,3,3), (2,3,1), (4,3,2), (3,5,4), (4,5,3)}.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.**
b) **Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.**

Sean A el resultado del dado Azul y R el del dado Rojo. $A, R \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hay $6 \times 6 = 36$ resultados equiprobables.
Sea S la puntuación.
Si A es par ($A \in \{2, 4, 6\}$), $S = A + 2R$.
Si A es impar ($A \in \{1, 3, 5\}$), $S = A + R$.

Probabilidad de S=10:
Para A par:
Si A=2, $2R = 8 \implies R = 4$. Par (2,4).
Si A=4, $2R = 6 \implies R = 3$. Par (4,3).
Si A=6, $2R = 4 \implies R = 2$. Par (6,2).
Para A impar: $A + R = 10$.
Si A=1, $R = 9$ (Imposible).
Si A=3, $R = 7$ (Imposible).
Si A=5, $R = 5$. Par (5,5)
Hay 4 casos favorables para S=10: (2,4), (4,3), (6,2), (5,5). $P(S = 10) = 4/36 = 1/9$.
Probabilidad de S impar:
Para A par: $S = A(\text{par}) + 2R(\text{par})$. La suma siempre es par. No hay casos.
Para A impar: $S = A(\text{impar}) + R$. S es impar si R es par ($R \in \{2, 4, 6\}$).
Si A=1, R puede ser 2, 4, 6. Pares (1,2), (1,4), (1,6). (3 casos)
Si A=3, R puede ser 2, 4, 6. Pares (3,2), (3,4), (3,6). (3 casos)
Si A=5, R puede ser 2, 4, 6. Pares (5,2), (5,4), (5,6). (3 casos)
Hay 9 casos favorables para S impar. $P(S \text{ impar}) = 9/36 = 1/4$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(S = 10) = \frac{1}{9}}. \quad \boldsymbol{P(S} \text{ es impar}\boldsymbol{) = \frac{1}{4}}.}$$

b) **Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.**

Probabilidad $P(A \text{ par}|S = 8)$:
Usamos $P(E|F) = P(E \cap F)/P(F)$.
Necesitamos los casos donde S=8:
A par ($A + 2R = 8$): (2,3), (4,2), (6,1). (3 casos)

A impar ($A + R = 8$): (3,5), (5,3). (2 casos)

Total de casos para S=8 es 3+2=5. $P(S = 8) = 5/36$. Casos donde S=8 y A es par: Son los 3 casos (2,3), (4,2), (6,1).

$P(A \text{ par} \cap S = 8) = 3/36$.

$P(A \text{ par}|S = 8) = \frac{3/36}{5/36} = \frac{3}{5}$.

Probabilidad $P(R$ impar$|S$ par$)$: Usamos $P(E|F) = P(E \cap F)/P(F)$. $P(S \text{ par}) = 1 - P(S \text{ impar}) = 1 - 1/4 = 3/4$. (Hay 27 casos donde S es par). Necesitamos los casos donde S es par y R es impar ($R \in \{1, 3, 5\}$):

A par ($S = A + 2R$ siempre es par): (2,1), (2,3), (2,5); (4,1), (4,3), (4,5); (6,1), (6,3), (6,5). (9 casos)

A impar ($S = A + R$ es par si R es impar): (1,1), (1,3), (1,5); (3,1), (3,3), (3,5); (5,1), (5,3), (5,5). (9 casos)

Total de casos donde S es par y R es impar es 9+9=18.

$$P(R \text{ impar} \cap S \text{ par}) = 18/36 = 1/2$$

$$P(R \text{ impar}|S \text{ par}) = \frac{P(R \text{ impar} \cap S \text{ par})}{P(S \text{ par})} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \text{ par}|S = 8) = \frac{3}{5}. \quad P(R \text{ impar}|S \text{ par}) = \frac{2}{3}.}}$$